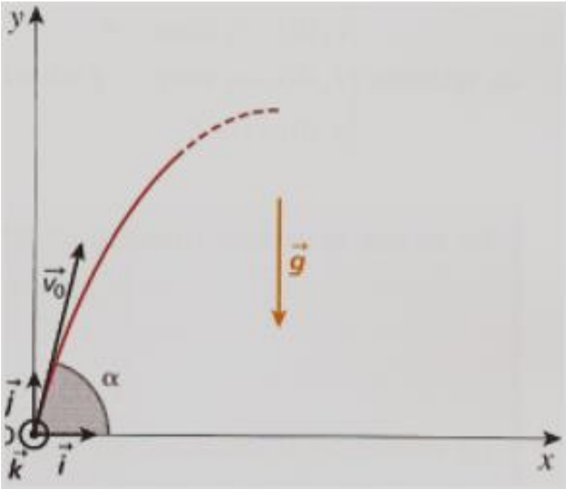
MOUVEMENTS DANS UN CHAMP UNIFORME

A. MOUVEMENT DANS LE CHAMP DE PESANTEUR UNIFORME : LANCER DE PROJECTILE



Au voisinage de la Terre, on considère que le champ de pesanteur est uniforme et décrit par des vecteurs $\vec{g}$.

Un projectile est lancé à t = 0s avec une vitesse $\vec{v_0}$ faisant un angle α par rapport à l'horizontale.

L'action de l'air est négligée par rapport à l'effet de son poids.

Le projectile est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen muni d'un repère cartésien (O;x,y,z).

Le plan (O;x,y) est appelé plan de tir : il contient les vecteurs $\vec{v_0}$ et $\vec{g}$.

O est la position initiale du centre de gravité G du projectile.

Les coordonnées du vecteur vitesse initiale dans ce système d'axes sont :

$$\vec{v_0} \begin{cases} v_{0_x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0_y} = v_0 \sin\alpha \\ v_{0_z} = 0 \end{cases}$$

- Bilan des forces et application de la deuxième loi de Newton

Le projectile n'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

La deuxième loi de Newton s'écrit $\vec{P} = m\vec{a}$, ce qui donne $m\vec{a} = m\vec{g}$ soit $\vec{a} = \vec{g}$

- Vecteurs accélération et vitesse instantanés

Sachant que $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ et que $\vec{g} = -g\vec{j}$, les coordonnées du vecteur accélération sont :

$$\vec{a}\,(t) \begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}(t) = 0 \\ a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}(t) = -g \\ a_z(t) = \frac{dv_z}{dt}(t) = 0 \end{cases}$$

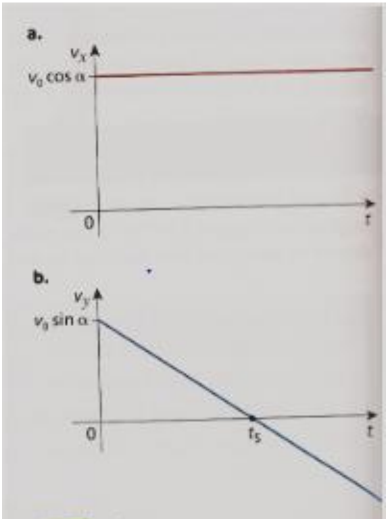


Fig. 2 Évolution :
a. de la vitesse horizontale en fonction du temps.
b. de la vitesse verticale en fonction du temps.

et, pour obtenir les coordonnées du vecteur vitesse, il suffit d'intégrer ces trois équations par rapport au temps. Il vient :

$$\vec{v}(t \begin{cases} v_x(t) = A \\ v_y(t) = -gt + B \\ v_z(t) = C \end{cases}$$

où A,Bet C sont des constantes d'intégration. Les coordonnées de la vitesse à l'instant initial permettent leur détermination. On obtient :

$$\vec{v}(t) \quad \begin{cases} v_x(t) = v_0\cos\alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0\sin\alpha \\ v_z(t) = C \end{cases}$$

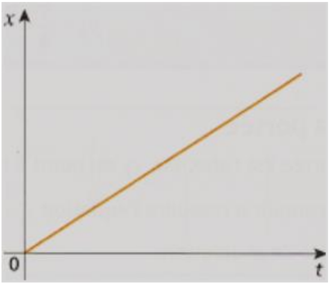
- vecteur position $\overrightarrow{OG}(t)$

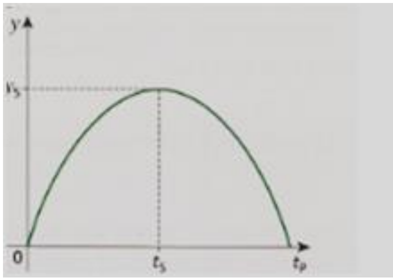
Sachant que $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ où le vecteur $\overrightarrow{OG}$ a pour coordonnées x, y et z, ces coordonnées s'obtiennent par intégration par rapport au temps de celles de $\vec{v}$.

$$\overrightarrow{OG}(t) \quad \begin{cases} x(t) = (v_0\cos\alpha)t + D \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\alpha)t + E \\ z(t) = F \end{cases}$$

A l'instant initial, le point G est en O ; on a donc D = E = F = 0 , soit :

$$\overrightarrow{OG}(t) \quad \begin{cases} x(t) = (v_0\cos\alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\alpha)t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$





- Equation cartésienne de la trajectoire

L'équation horaire $x = (v_0\cos\alpha)t$ conduit à $t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$

En remplaçant t par son expression dans l'équation horaire de y, il vient :

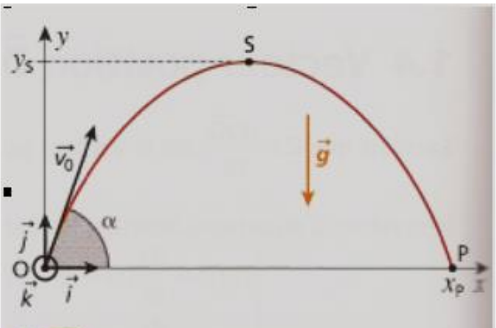
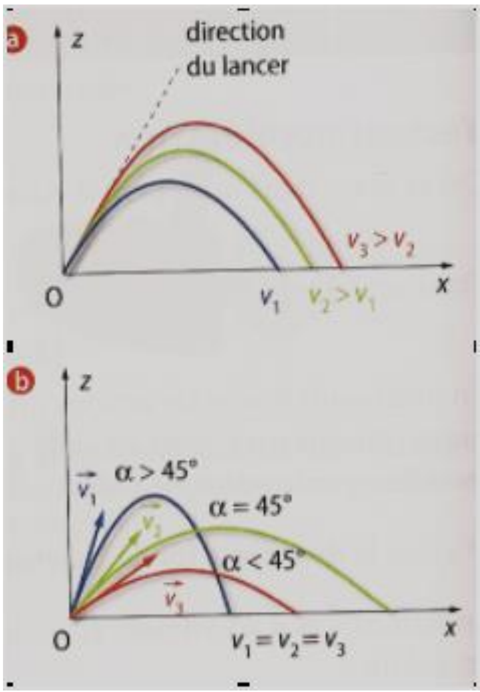


Fig. 5 Trajectoire parabolique.

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\sin\alpha\frac{x}{v_0\cos\alpha}$$

soit $y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + \tan\alpha\, x$

Il s'agit d'une parabole, dans le plan de tir, incurvée vers le bas.



- Caractéristiques de la trajectoire

- Flèche

Lorsque le sommet est atteint, à t_s, $v_y(t_s) = 0$. On a donc $t_S = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$.

En introduisant cette expression dans y(t), il vient :

$$y_s = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0\sin\alpha\frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

La flèche (hauteur maximale de la trajectoire) s'écrit : $y_s = \frac{1}{2}\frac{v_0{}^2 sin^2\alpha}{g}$

- Portée

C'est l'abscisse x_P du point P, dont l'ordonnée y_P est nulle.

On résout l'équation $y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 cos\alpha}\right)^2 + \tan\alpha\, x = 0$

La solution qui convient s'exprime sous la forme $x_P = \frac{v_0{}^2 sin(2\alpha)}{g}$

La portée est maximale pour 2α = 1, c'est-à-dire α = 45°

- Cas particulier : chute libre verticale sans vitesse initiale

Lorsque la vitesse initiale est nulle ($v_0 = 0$), le projectile est en chute libre verticale. Seul l'axe y est utile.

Cela donne : $v_y(t) = -gt$ et $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$.

Le mouvement est rectiligne accéléré.

B. MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGEE DANS UN CHAMP ELECTROSTATIQUE UNIFORME

Une particule de masse m porte une charge q. Placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{E}$, elle est soumise à une force électrique $\vec{f}$ définie par $\vec{f} = q\vec{E}$. Son poids est considéré comme négligeable devant la valeur de $\vec{f}$.

Référentiel : terrestre considéré galiléen

Deuxième loi de Newton : $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ soit $q\vec{E} = m\vec{a}$ d'où $\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$

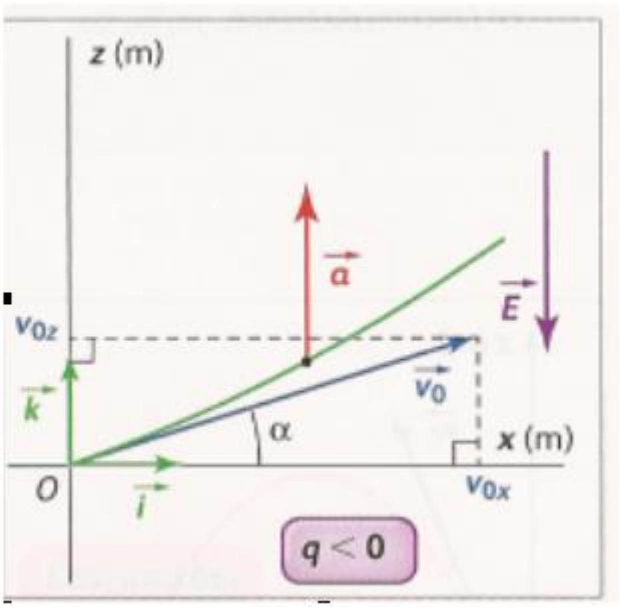
A t_0, la particule entre en O dans l'espace où règne le champ $\vec{E}$ avec une vitesse $\vec{v_0}$ faisant un angle α avec l'axe horizontal Ox.

Coordonnées de $\vec{v_0}$:

$$\vec{v_0} \begin{cases} v_{0_x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0_y} = v_0 \sin\alpha \\ v_{0_z} = 0 \end{cases}$$

La relation $\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$ permet d'écrire les coordonnées du vecteur accélération, puis par intégration, celles du vecteur vitesse puis celles du vecteur position dans le cas q>0 et $\vec{E}$ dirigé vers le bas (on remplace $\vec{g}$ par $\frac{q\vec{E}}{m}$)

$$\vec{a}(t) \begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}(t) = 0 \\ a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}(t) = -\frac{qE}{m} \\ a_z(t) = \frac{dv_z}{dt}(t) = 0 \end{cases}$$



$$\vec{v}\,(t)\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos\alpha \\ v_y(t) = -\frac{qE}{m}\,t + v_0\sin\alpha \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OG}\,(t)\begin{cases} x(t) = (v_0\cos\alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\alpha)t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Par analogie avec la chute libre, on a

$$y = -\frac{1}{2}\frac{qE}{m}\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + \tan\alpha\, x$$

(équation de la trajectoire parabolique)

- Quand la particule porte une charge q<0, la trajectoire parabolique est tournée dans le sens opposé au champ $\vec{E}$.